



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية



الثانوية: الحرّية
المستوى: ثالثة ثانوي
المعامل: 5
قسم: 2ع3+1ع3

مديرية التربية لولاية قسنطينة
المادة: الرياضيات
الشعبة: علوم تجريبية
الإثنين 12 ماي 2025

المدة: 3 ساعات ونصف ساعة

البكالوريا البيضاء

دورة ماي 2025

على المترشحة أن تختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن): من أجل k عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2. يحتوي صندوق على k كرية حمراء و 3 كريات بيضاء، نسحب عشوائياً ودون التمييز كرتان من هذا الصندوق على التوالي وبارجاع.

(كل الكريات متماثلة ولا تُفرّق بينها عند اللمس).

وتكون شروط اللعبة كالآتي:

- إذا كانت الكرتان المسحوبتين بيضاويين فإنّ اللاعب يخسر $9DA$.
 - إذا كانت الكرتان المسحوبتين حمراويين فإنّ اللاعب يخسر $1DA$.
 - إذا كانت الكرتان المسحوبتين من لونين مختلفين فإنّ اللاعب يربح $5DA$.
- X_k المتغيّر العشوائي الذي يرفق بربحية اللاعب (أي أنّ اللاعب سيربح).

$$(1) \text{ أ- أثبتني أن: } P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$$

ب- عرّفني قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X_k .

(2) نعتبر الأمل الرياضياتي $E(X_k)$ للمتغيّر العشوائي X_k ، عيّني قيم k التي من أجلها يتمكن اللاعب من

الربح.

التمرين الثاني (5ن):

(1) أحسبي $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$ ، ثمّ حلّي في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$(E) \quad z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0 \dots \dots \dots$$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها

على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

أ- أثبتني أنّ: $z_B \times \bar{z}_C = z_A$ ، ثمّ إستنتجي أنّ: $z_A \times z_C = 4z_B$.

ب- أكتبني كل من z_C و z_B على الشكل المثلثي.

ج- إستنتجي الشكل الأسّي لـ z_A .

(3) لتكن D النقطة التي لاحقتها z_D ، حيث: $z_D = z_A^4$ ، M نقطة لاحقتها z و M' نقطة لاحقتها z' حيث:

$$z' = \frac{1}{4} z_A z$$

أ- ما طبيعة التحويل؟ أذكره عناصره المميزة.

ب- عيّني صورة النقطة C بالتحويل النقطي.

ج - ما طبيعة المثلث OBC ؟ عللي الإجابة.

د- أثبتني أن: $Z_B = 128Z_A^4$ ، ثم إستنتجي أنّ النقط O ، B و D في إستقامة.

التمرين الثالث (ن4): لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$$

(1) أ- أحسبي u_1 و u_2 (أكتبي الحدّين على شكل كسرين غير قابلين للإختزال)، و u_3 و u_4 (بقيّم تقريبية إلى 10^{-5}).

ب- ضعي تخميناً حول إتجاه تغيّر وتقارب المتتالية (u_n) .

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n - 3$.

أ- أثبتني أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإنّ: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

ب- برهني بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $-1 \leq v_n \leq 0$.

ج - أدرسي إتجاه تغيّر المتتالية (v_n) ، ثمّ إستنتجي أنّ المتتالية (v_n) متقاربة.

(3) لتكن l نهاية المتتالية (v_n) ، بيّني أنّ: $l = -\frac{1}{2}l^2$ ، ثمّ عيّني قيمة l .

(4) هل التخمين في السؤال الأول محقّق؟

التمرين الرابع (ن7):

(I) 1) بما أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، برهني أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(2) إستنتجي أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، فإنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

(3) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$.

أ- أدرسي تغيّرات الدالة g .

ب- أحسبي $g(1)$ ثمّ إستنتجي إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{o})$ ، (وحدة الطول: $2cm$).

(1) أحسبي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أ- بيّني أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

ب- أدرسي الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(3) أكتبي $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

(4) إستنتجي إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكلي جدول تغيّرات الدالة f .

(5) أرسمي كلا من (Δ) و (C_f) .

(III) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات: $x = 1$ ، $y = x$ و $x = \alpha$.

(1) أحسبي $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α ، (حيث: α عدد حقيقي أكبر تماماً من 1)، ثمّ أحسبي النهاية $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$.

(2) لتكن: $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = l$ ، بيّني أنّ: $l = \mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

يحتوي كيس على 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء (حيث: n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2).
(الكريات لا تفرق بينها عند اللمس).

(1) يقوم اللاعب بسحب كرتين على التوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الكيس، حيث:

- يربح اللاعب 1DA من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة.

- يخسر اللاعب 2DA من أجل كل كرية سوداء مسحوبة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح اللاعب.

أ- عيّني القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

ب- عرّفي قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ج- أحسبي أمله الرياضياتي بدلالة n .

د- هل توجد قيمة للعدد n حتى يكون الأمل الرياضياتي معدومًا؟ (إن كانت الإجابة نعم، جدي n).

(2) نفرض أننا سحبنا كرتين على التوالي دون إرجاع، ولتكن الحادثتين:

A_n : "الحصول على كرتين من نفس اللون".

B_n : "الحصول على كرتين من لونين مختلفين".

أ- أحسبي $P(A_n)$ بدلالة n ، ثم أحسبي $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$. فسّري النتيجة.

ب- أحسبي $P(B_n)$ بدلالة n ، ثم أحسبي $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$. فسّري النتيجة.

التمرين الثاني (5ن):

(1) أحسبي $(1 + \sqrt{3})^2$ ، ثم حلّ في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:

$$(E) \quad z^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} = 0 \dots \dots \dots$$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، و C التي

لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B ، و z_C حيث: $z_A = 1 + i$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ، و $z_C = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

أ- أثبتني أن: $z_C = \frac{z_A}{z_B}$.

ب- أكتبي كل من z_B و z_A على الشكل المثلثي.

ج- إستنتجي الشكل الأسي لـ z_C .

د- إستنتجي أن: $\tan \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$.

(3) لتكن D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة: $2i\sqrt{3}$.

أ- بيّني أن: $z_D = \bar{z}_B$.

ب- أثبتني أن: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; ($k \in \mathbb{Z}$)، مستنتجةً قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB})$.

ج- بيّني أن: $OD = OB$ ، ثم إستنتجي طبيعة المثلث OBD .

د- إستنتجي صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{2\pi}{3}$.

التمرين الثالث (4ن): لتكن (u_n) متتالية معرفةً بحدّها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$$

1) أ- أثبتني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

ب- بيّني أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

ج- استنتجني أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، أحسبي نهايتها.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بحدّها الأول: $v_0 = 1$ ، وبالعلاقة التراجعية: $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n}$.

أ- أثبتني أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$.

ب- برهنني بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$.

ج- أحسبي النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

3) نضع: $S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \right)$ ، حيث: $n \geq 1$.

أ- أثبتني أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{45}{2} \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \right]$.

ب- استنتجني $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الرابع (7ن): نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،
(وحدة الطول: 2cm).

1) أ- أحسبي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بيّني أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $(-\infty)$ ، يُطلب تعيين معادلة له.

ج- أدرسي الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

2) أ- أحسبي $f'(x)$ ، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب- استنتجني اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكلي جدول تغيّراتها.

ج- أثبتني أنّ (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها.

3) أثبتني أنّ المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

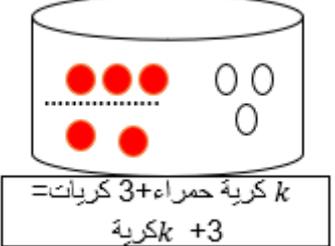
4) بيّني أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) يُوازي المقارب المائل (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

5) أرسمي كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) . (نأخذ: $f(3.8) \simeq -7.5$).

6) ناقشي حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$.

7) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمتين: $y = -x + \frac{5}{2}$ ،

$x = 1$ و $x = \alpha$. أحسبي $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α .

العلامة	الموضوع الأول - التصحيح المفصل								
(4ن)	<p>التمرين الأول: يحتوي صندوق على k كرية حمراء و 3 كريات بيضاء، (حيث: $k \geq 2$).</p>								
0.5									
0.5	<p>آلية السحب: سحب كرتين ($p = 2$) من ($n = k + 3$) كرية عشوائيًا على التوالي وبارجاع (نستخدم قائمة، أي: $card\Omega = (k + 3)^2$).</p>								
0.5	<p>X_k المتغير العشوائي الذي يرفق بربحية اللاعب (أي أن اللاعب سيربح).</p>								
0.25	<p>(1) - أثبات أن: $P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$ أي أن اللاعب يربح 5DA، مما يعني أنه سحب 1 كرية حمراء</p>								
0.25	<p>من (k أي: k^1) و 1 كرية بيضاء من 3 (أي: 3^1)، والترتيب في هذه الحالة مهم ($\frac{2!}{1! \times 1!}$، بيضاء وحمراء أو حمراء وبيضاء)، فيكون: $P(X_k = 5) = \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{k^1 \times 3^1}{(k+3)^2}$، إذن: $P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.</p>								
0.25	<p>ب- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X_k: حسب اللعبة فإن:</p>								
0.25	<p>- إذا تم سحب كرتين بيضاويين (أي: 2 بيضاء من 3، معناه: 3^2) فإن اللاعب يخسر 9DA مما يعني أن $(X_k = -9)$.</p>								
0.25	<p>- إذا تم سحب كرتين حمراويين (أي: 2 حمراء من k، معناه: k^2) فإن اللاعب يخسر 1DA مما يعني أن $(X_k = -1)$.</p>								
0.25	<p>- إذا تم سحب كرية حمراء من k (أي: k^1) وكرية بيضاء من 3 (أي: 3^1)، (أي: بيضاء وحمراء أو حمراء وبيضاء والترتيب مهم) فإن اللاعب يربح 5DA مما يعني أن: $(X_k = +5)$.</p>								
0.5	<p>ومنه: $X_k(\Omega) \in \{-9; -1; 5\}$. ويكون قانون الاحتمال:</p>								
0.5	$P(X_k = -9) = \frac{3^2}{(k+3)^2} = \frac{9}{(k+3)^2}$								
0.5	$P(X_k = -1) = \frac{k^2}{(k+3)^2}$								
	<p>إذن،</p>								
	$P(X_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$ (حسب أ)								
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>X_i</td> <td>-9</td> <td>-1</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>P_i</td> <td>$\frac{9}{(k+3)^2}$</td> <td>$\frac{k^2}{(k+3)^2}$</td> <td>$\frac{6k}{(k+3)^2}$</td> </tr> </table>	X_i	-9	-1	5	P_i	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$
X_i	-9	-1	5						
P_i	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$						
0.25	<p>(2) نعتبر الأمل الرياضي $E(X_k)$ للمتغير العشوائي X_k، تعيين قيم k التي من أجلها يتمكن اللاعب من الربح: نعلم أن: $E(X_k) = \sum X_i P_i = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2}$</p>								
0.25	<p>ومنه: $E(X_k) = \frac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} = \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2}$، ويتمكن اللاعب من الربح إذا كان: $E(X_k) > 0$، أي: $-k^2 + 30k - 81 > 0$، وباعتبارها معادلة: $\Delta = 576$، $-k^2 + 30k - 81 = 0 \rightarrow \Delta = 576$</p>								
0.25	<p>ومنه: $k' = \frac{-30 - 24}{-2} = 27$؛ $k'' = \frac{-30 + 24}{-2} = 3$، وتكون الإشارة موجبة لما $k \in]3; 24[$.</p>								
0.25	<p>وبما أن k عدد طبيعي، فإن:</p>								
0.25	<p>$k \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25; 26\}$</p>								

(ن5)

0.25

1) حساب $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2$: لدينا: $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$.
 - حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:
 $z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0 \dots \dots \dots (E)$

0.25

نحسب المميز Δ حيث: $\Delta = b^2 - 4ac = [-2(\sqrt{2} + \sqrt{6})]^2 - 4 \times 1 \times 16$: أي:
 $\Delta = 4(2 + 2\sqrt{12} + 6) - 64 = 4[2 + 2\sqrt{12} + 6 - 16] = 4[-8 + 4\sqrt{3}]$
 ومنه: $\Delta = -4(6 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} + 2) = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = [2(\sqrt{6} - \sqrt{2})i]^2$
 بما أن: $\Delta \neq 0$ ، فإن: (E) تقبل حلين مترافقين:

0.25

(بوضع: $\delta = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$ أو $\delta = -2(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$ حيث: $\delta^2 = \Delta$).

0.25

ومنه:

$$\begin{cases} z' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2} = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - (\sqrt{6} - \sqrt{2})i \\ z'' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})+2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2} = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i \end{cases}$$

 إذن: $S = \{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) - (\sqrt{6} - \sqrt{2})i; (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i\}$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ و $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

0.25

- إثبات أن: $z_B \times \bar{z}_C = z_A$:
 لدينا: $z_B \times \bar{z}_C = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = (1 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ ، ومنه:
 $z_B \times \bar{z}_C = \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6} = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = z_A$
 إذن: $z_B \times \bar{z}_C = z_A$ وهو المطلوب.

0.25

- استنتاج أن: $z_A \times z_C = 4z_B$:
 $z_A \times z_C = [(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})](\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ ، أي:
 $z_A \times z_C = \sqrt{12} + 2 + i\sqrt{12} + 2i + i\sqrt{12} - 2i - \sqrt{12} + 2 = 4 + 2i\sqrt{12}$ ، ومنه:
 $z_A \times z_C = 4(1 + i\sqrt{3}) = 4z_B$ ، إذن: $z_A \times z_C = 4z_B$.

0.25

ب- كتابة كل من z_B و z_C على الشكل المثلثي: لدينا: $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، ومنه:

0.25

$$r_B = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

0.25

$$z_B = \left[2; \frac{\pi}{3} \right] \text{، أي: } \begin{cases} \arg(z_B) = \theta_B \rightarrow \cos \theta_B = \frac{1}{2} \rightarrow \theta_B = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ \sin \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$z_B = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \text{، إذن:}$$

لدينا: $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ، ومنه:

0.25

$$r_C = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$$

0.25

$$z_C = \left[2; \frac{\pi}{4} \right] \text{، أي: } \begin{cases} \arg(z_C) = \theta_C \rightarrow \cos \theta_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta_C = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ \sin \theta_C = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

0.25

$$z_C = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \text{، إذن:}$$

	<p>ج- استنتاج الشكل الأسي لـ z_A: حسب -، فإن: $z_B \times \bar{z}_C = z_A$، وحسب ما سبق فإن:</p>
0.25	$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$ <p>فيكون: $\begin{cases} z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \\ z_C = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$ خواص المرافق $\rightarrow \bar{z}_C = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$</p>
0.25	<p>أي: $z_A = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$، إذن: $z_A = 4e^{i\frac{(4\pi-3\pi)}{3 \times 4}} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$</p>
	<p>(3) لنكن D النقطة التي لاحقها z_D، حيث: $z_D = z_A^4$، M نقطة لاحقها Z و M' نقطة لاحقها z' حيث:</p> $z' = \frac{1}{4} z_A z$ <p>أما طبيعة التحويل؟ لدينا: $z' = e^{i\frac{\pi}{12}} z$، $z' = \frac{1}{4} z_A z = z' = \frac{1}{4} \times 4e^{i\frac{\pi}{12}} \times z = e^{i\frac{\pi}{12}} z$، أي: $z' = e^{i\frac{\pi}{12}} z$</p>
0.25	<p>من الشكل: $z' = az + b$، حيث: $\begin{cases} a = e^{i\frac{\pi}{12}} \\ b = 0 \end{cases}$، وبما أن: $\begin{cases} a \in \mathbb{C}^* \\ a = 1 \end{cases}$، إذن: التحويل عبارة عن دوران.</p>
0.25	<p>-العناصر المميزة للتحويل النقطي: لدينا: $a = e^{i\frac{\pi}{12}}$، ومنه: $\arg(a) = \frac{\pi}{12} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$</p> <p>مما يعني أن زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{12}$، ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة: $z_0 = \frac{b}{1-a} = 0$</p> <p>إذن: التحويل عبارة عن دوران، زاويته $\frac{\pi}{12}$ ومركزه النقطة الصامدة $O(0; 0)$.</p>
	<p>ب- تعيين صورة النقطة C بالتحويل النقطي:</p>
0.25	<p>لدينا: $z' = z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{12}} z_C = e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4})} = 2e^{i\frac{4\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$</p> <p>إذن: $z_{C'} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = z_B$</p>
0.25	<p>ج- ما طبيعة المثلث OBC؟ مع التحليل: لدينا حسب ما سبق فإن: $R(z_C) = z_B$، مما يعني أن:</p> $\begin{cases} OC = OB = 2 \\ (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{12} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ <p>إذن: OBC مثلث متساوي الساقين.</p>
	<p>د- اثبات أن: $z_A^4 = 128z_B$:</p>
0.25	<p>لدينا: $z_A^4 = (4e^{i\frac{\pi}{12}})^4 = 4^4 \times e^{i\frac{4\pi}{12}} = 256e^{i\frac{\pi}{3}} = 256(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$</p> <p>ومنه: $z_A^4 = 256\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 128 \times 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$، إذن: $z_A^4 = 128z_B$</p>
0.25	<p>- استنتاج أن النقط O، B و D في إستقامية: حسب ما سبق: $\begin{cases} z_D = z_A^4 (3 \text{ حسب س}) \\ z_A^4 = 128z_B (4 \text{ حسب د}) \end{cases}$، فإن:</p> $\frac{z_D - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A^4}{z_B} = \frac{128z_B}{z_B} = 128 \in \mathbb{R}$ <p>إذن: النقط O، B و D في إستقامية.</p>
(4ن)	<p>التمرين الثالث: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = 2$، ومن أجل كل عدد طبيعي n :-</p> $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}$ <p>(1) أ- حساب u_1 و u_2 (أكتبى الحدّين على شكل كسرين غير قابلين للاختزال)، و u_3 و u_4 (بقيم تقريبية إلى 10^{-5}):</p> <p>لدينا: من أجل: $n = 0$، فإن: $u_{0+1} = -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times 4 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{8-3}{2}$، ومنه: $u_1 = \frac{5}{2} = 2.5$، إذن: $u_1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{8-3}{2}$</p> <p>من أجل: $n = 1$، فإن: $u_{1+1} = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{25}{4} + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-25}{8} + \frac{15-3}{2} = \frac{-25+48}{8}$، ومنه: $u_2 = \frac{23}{8} = 2.875$، إذن: $u_2 = \frac{-25}{8} + \frac{15-3}{2} = \frac{-25+48}{8}$</p> <p>من أجل: $n = 2$، فإن: $u_{2+1} = -\frac{1}{2}u_2^2 + 3u_2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{529}{64} + 3 \times \frac{23}{8} - \frac{3}{2} = \frac{-529}{128} + \frac{69-24}{8} = \frac{-529+912}{128} = \frac{383}{128}$، ومنه: $u_3 = \frac{-529}{128} + \frac{69-24}{8} = \frac{-529+912}{128} = \frac{383}{128}$، إذن: $u_3 = 2.9921875 \approx 2.992188$</p>

0.25	<p>من أجل: $n = 3$، فإن: $u_{3+1} = -\frac{1}{2}u_3^2 + 3u_3 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{383}{128}\right)^2 + 3 \times \frac{383}{128} - \frac{3}{2}$، إذن: $u_4 = 2.999969482 \approx 2.99997$.</p>
0.25	<p>ب- وضع تخميناً حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n): حسب حساب الحدود فإن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$، مما يعني أن المتتالية متزايدة، كما أن الحدود تقترب شيئاً فشيئاً نحو 3، فهي متقاربة نحو 3.</p>
0.25	<p>(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = u_n - 3$. أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$: لدينا: $v_n = u_n - 3$، ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$ $v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3 \times \frac{-2}{-2} \times u_n - \frac{9}{2} = \frac{-1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = \frac{-1}{2}(u_n - 3)^2$ إذن: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.</p>
0.25	<p>ب- البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن: $-1 < v_n < 0$: - نضع الخاصية: $P(n) : -1 \leq v_n \leq 0 ; n \in \mathbb{N}$ - من أجل $n = 0$، فإن: $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ و $-1 \leq v_0 = -1 \leq 0$، فعلاً: $(-1 \in [-1 ; 0])$، ومنه: $P(0)$ محققة. - نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n، أي: $-1 \leq v_n \leq 0$. - نحاول إثبات صحة الخاصية من أجل $(n + 1)$، أي: $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$؟ - لدينا فرضاً: $-1 \leq v_n \leq 0$، أي: $-1 \leq u_n - 3 \leq 0$، وبما أن الأطراف سالبة، بتربيعها نجد أن: $0 \leq (u_n - 3)^2 \leq 1$، أي: $0 \leq v_n^2 \leq 1$، وبضرب أطراف هذه الأخيرة في $-\frac{1}{2}$، نجد أن: $-1 \leq -\frac{1}{2}v_n^2 \leq 0$، ومنه وبالتعدي، فإن: $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$. إذن: وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n أن: $-1 \leq v_n \leq 0$.</p>
0.25	<p>ج- دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n): لندرس إشارة $v_{n+1} - v_n$، حيث: $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$، وحسب ما سبق، فإن: $-1 \leq v_n \leq 0$، ومنه: $0 \leq -v_n \leq 1$، أي: $-v_n > 0$... (1). ومن جهة أخرى، وبما أن: $-1 \leq v_n \leq 0$، بضرب الأطراف في $\frac{1}{2} > 0$، نجد أن: $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n \leq 0$، وبإضافة 1 نحصل على: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}v_n + 1 \leq 1$، أي: $\frac{1}{2}v_n + 1 > 0$... (2). من (1) و (2)، نجد أن: $-v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geq 0$، إذن: $v_{n+1} - v_n > 0 ; \forall n \in \mathbb{N}$، ومنه: (v_n) متزايدة تماماً على \mathbb{N}.</p>
0.25	<p>- استنتاج أن المتتالية (v_n) متقاربة: لدينا (حسب ب-ب) $v_n \leq 0$، مما يعني أن المتتالية (v_n) محدودة من الأعلى بالصفر، كما أنها متزايدة تماماً على \mathbb{N}، إذن: (v_n) متقاربة (حسب مبرهنة ما).</p>
0.25	<p>(3) لتكن ℓ نهاية المتتالية (v_n)، اثبات أن: $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$: تعيين قيمة ℓ: بما أن المتتالية (v_n) متقاربة ونهايتها ℓ، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$. وبما أن: $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$، (حسب س-2-أ)، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}v_n^2\right)$. وبالتعويض نجد أن: $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$، وهو المطلوب.</p>
0.25	<p>- تعيين قيمة ℓ: لنحل المعادلة: $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$، حيث: $\ell + \frac{1}{2}\ell^2 = 0 \rightarrow \ell\left(1 + \frac{1}{2}\ell\right) = 0$. إما $\left(1 + \frac{1}{2}\ell = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\ell = -1 \rightarrow \ell = -2 \notin [-1 ; 0]\right)$ (مرفوضة لأن: $-1 \leq v_n \leq 0$)، أو $\left(\ell = 0 \in [-1 ; 0]\right)$ (مقبولة لأن: $-1 \leq v_n \leq 0$)، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell = 0$.</p>

4) هل التخمين في السؤال الأول محقق؟

0.25

المتتالية (u_n) متزايدة تمامًا (لأن: $u_n = v_n + 3$) والمتتالية (v_n) متزايدة حسب السؤال 2-ج-). ولدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = 0$ ، ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$. (نعم، المتتالية (u_n) متقاربة نحو 3). إذن: **التخمين محقق.**

(ن7)

التمرين الرابع:

1) (I) بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، البرهان أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$:

0.25

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، فإن: $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \frac{1}{\frac{e^{\ln x}}{\ln x}}$ ، وبوضع: $X = \ln x$ ، حيث:

0.25

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^{\ln x}}{\ln x}} = 0$ ، أي: $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ ، وعلماً أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$:

0.25

ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2، ومن أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، لدينا: $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ ، وبما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ، فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ ، وهو المطلوب.

3) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$.

أ- دراسة تغيرات الدالة g :

0.25

مجموعة التعريف: $D_g =]0; +\infty[$ (من المعطيات).

0.25

النهايات: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 1 + 2 \ln x = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 1 + 2 \ln x = +\infty$

0.25

إتجاه التغير: g قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ كمجموع دوال قابلة للإشتقاق، حيث: $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$

0.25

ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، فإن: $g(x) > 0$ ، لأن: $\begin{cases} 3x^2 > 0 \\ \frac{2}{x} > 0 \end{cases}$ ، $\forall x \in]0; +\infty[$. إذن: g متزايدة تمامًا على $]0; +\infty[$.

جدول التغيرات:

0.25

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0.25

ب- حساب $g(1)$:

لدينا: $g(1) = 1^3 - 1 + 2 \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$ ، إذن: $g(1) = 0$.
- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$: بما أن: $g(1) = 0$ ، فإن:

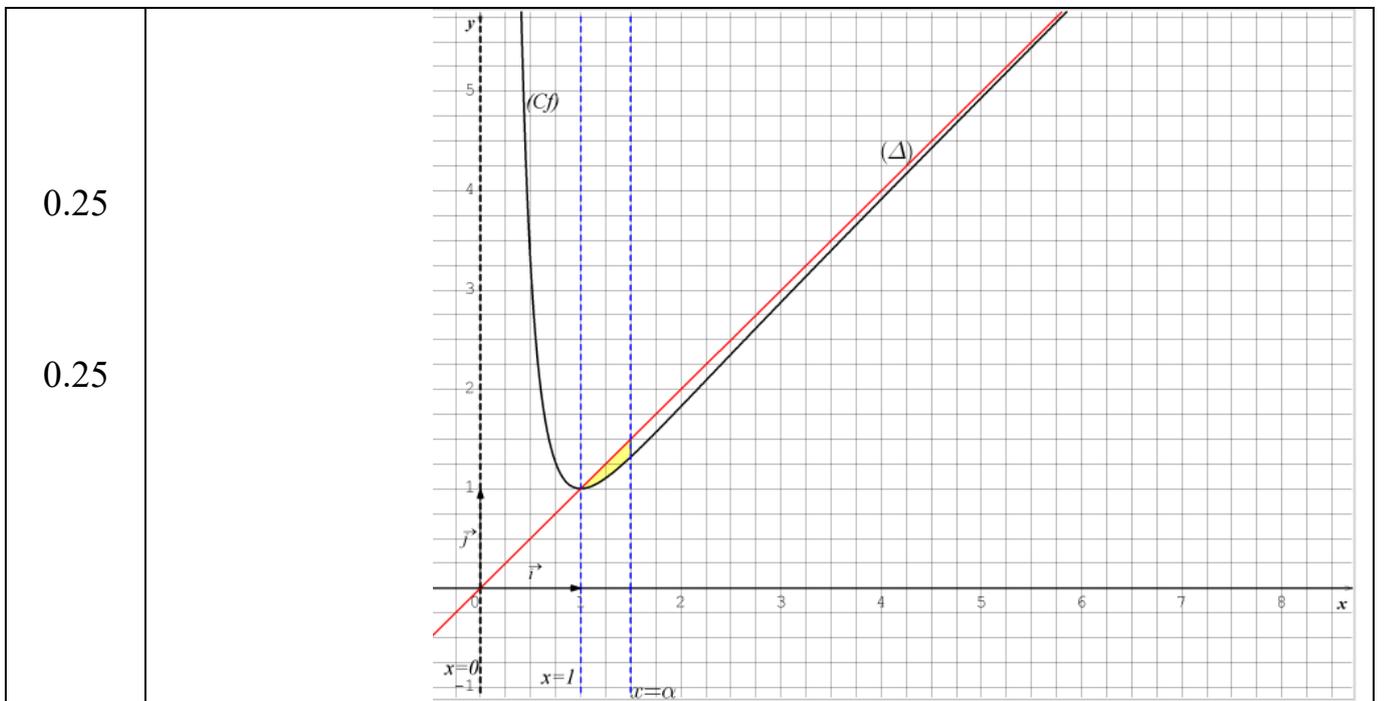
0.25

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		- 0 +	

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$.

1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

0.25	$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \quad \text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - \frac{\ln x}{x^2} \right] = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ <p>ومنه: $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي يُوازي حامل محور الترتيب (yy') عند $+\infty$.</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln x}{x^2} \right] = +\infty$ <p>إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.</p>												
0.25	<p>(2) - أثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ)، يُطلب تعيين معادلة له:</p> <p>نلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln x}{x^2} \right] = 0$ ، مما يعني أن البيان (C_f) مستقيم مقارب مائل $y = x$: (Δ).</p>												
0.25	<p>ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ): أي ندرس إشارة $f(x) - x$، حيث:</p> $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \\ x^2 > 0; \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$\ln x$</td> <td></td> <td>-</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$f(x) - x$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> </table> <p>مما يعني أن: (C_f) يقع أسفل المقارب (Δ) من أجل $x \in]0; 1[$.</p> <p>(C_f) يقطع المقارب (Δ) من أجل $x = 1$، حيث: $(C_f) \cap (\Delta) = \{(1; 1)\}$.</p> <p>$(C_f)$ يقع أعلى المقارب (Δ) من أجل $x \in]1; +\infty[$.</p>	x	0	1	$+\infty$	$\ln x$		-	0	$f(x) - x$		+	0
x	0	1	$+\infty$										
$\ln x$		-	0										
$f(x) - x$		+	0										
0.25	<p>(3) كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f: f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ كمجموع وحاصل قسمة دوال قابلة للاشتقاق، حيث:</p> $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln x}{x^4} = 1 - \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^3} = 1 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ <p>ومنه: $f'(x) = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$.</p>												
0.25	<p>(4) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:</p> <p>إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$، وحسب الجزء الأول، فإن:</p> <p>$f'(x) < 0$ لما $x \in]0; 1[$، ومنه: f متناقصة تماماً على $]0; 1[$.</p> <p>$f'(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$، ومنه: f متزايدة تماماً على $]1; +\infty[$.</p> <p>تشكيل جدول تغيرات الدالة f:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>-</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$f(1)$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p>حيث: $f(1) = 1$.</p>	x	0	1	$+\infty$	$f'(x)$		-	0	$f(x)$	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$
x	0	1	$+\infty$										
$f'(x)$		-	0										
$f(x)$	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$										
0.25	<p>(5) رسم كلا من (Δ) و (C_f):</p>												



0.25

0.25

0.25

0.25

0.25

0.25

(III) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمات: $x = 1, y = x$ و $x = \alpha$.

(1) حساب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α ، (حيث α عدد حقيقي أكبر تمامًا من 1):

بما أن البيان (C_f) يقع تحت المقارب المائل (Δ) على $[1; \alpha]$ ، فإن:
 وحسب التكامل بالتجزئة، فإن: $\mathcal{A}(\alpha) = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \int_1^\alpha [y - f(x)] dx = 4 \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$\int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\alpha + \int_1^\alpha \frac{1}{x^2} dx \text{، ومنه: } \begin{cases} u(x) = \ln x \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1 + \ln x}{x} \right]_1^\alpha = -\frac{1 + \ln \alpha}{\alpha} + \frac{1 + \ln 1}{1} = \frac{\alpha - 1 - \ln \alpha}{\alpha} \text{ أي:}$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = 4 \left(\frac{\alpha - 1 - \ln \alpha}{\alpha} \right) \text{ cm}^2 \text{ إذن:}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 4 \left(1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{\ln \alpha}{\alpha} \right) = 4 \text{ لدينا:}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 4 \text{ إذن:}$$

(2) لتكن $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \ell$ ، إثبات أن: $\ell = \mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right)$:

بما أن البيان (C_f) يقع فوق المقارب المائل (Δ) على $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$ ، فإن:

0.25

$$\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \int_{\frac{1}{e}}^1 [f(x) - y] dx = 4 \int_{\frac{1}{e}}^1 -\frac{\ln x}{x^2} dx = 4 \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{e}} - \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} \right)$$

$$\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = 4(1 - e + e) = 4 = \ell \text{ أي:}$$

0.25

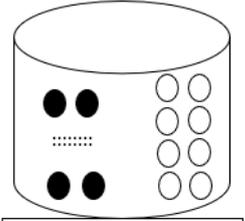
$$\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \ell = 4 \text{ إذن:}$$

الموضوع الثاني - التصحيح المفصل -

العلامة

(4ن)

التمرين الأول: 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء، (حيث: $n \geq 2$).



n كرية سوداء + 8 كريات بيضاء

ألية السحب: سحب كرتين ($p = 2$) من ($n = n + 8$) كرية عشوائيًا على التوالي وبارجاع (نستخدم قائمة، أي: $(n + 8)^2 = \text{card}\Omega$).

(1) يقوم اللاعب بسحب كرتين على التوالي مع إرجاع الكرية المسحوبة إلى الكيس، حيث:
- يربح اللاعب 1DA من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة.
- يخسر اللاعب 2DA من أجل كل كرية سوداء مسحوبة.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح اللاعب.

أ- تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X : حسب اللعبة فإن:
- إذا تم سحب كرتين بيضاويين (أي: 2 بيضاء من 8، معناه: 8^2) فإن اللاعب يربح 2DA مما يعني أن $(X = 1 + 1 = +2)$.

- إذا تم سحب كرتين سوداويين (أي: 2 سوداء من n ، معناه: n^2) فإن اللاعب يخسر 4DA مما يعني أن $(X = -2 - 2 = -4)$.

- إذا تم سحب كرية سوداء من n (أي: n^1) وكرية بيضاء من 8 (أي: 8^1)، (أي: NB أو BN والترتيب مهم) فإن اللاعب يخسر 1DA مما يعني أن: $(X = 1 - 2 = -1)$.
ومنه: $X(\Omega) \in \{-4; -1; 2\}$.

ب- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X : حسب اللعبة فيكون قانون الاحتمال:

0.25
$$P(X = -4) = \frac{n^2}{(n+8)^2}$$

0.25
$$P(X = -1) = \frac{2!}{1! \times 1!} \frac{n^1 \times 8^1}{(n+8)^2} = \frac{16n}{(n+8)^2}$$
 ، إذن:

0.25
$$P(X = 2) = \frac{8^2}{(n+8)^2} = \frac{64}{(n+8)^2}$$

X_i	-4	-1	2
P_i	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$

ج- حساب الأمل الرياضي بدلالة n :

0.25 نعم أن: $E(X) = \sum X_i P_i = -4 \times \frac{n^2}{(n+8)^2} + (-1) \times \frac{16n}{(n+8)^2} + 2 \times \frac{64}{(n+8)^2}$
ومنه: $E(X) = \frac{4(-n^2 - 4n + 32)}{(n+8)^2}$ ، إذن: $E(X) = \frac{-4n^2 - 16n + 128}{(n+8)^2} = \frac{4(-n^2 - 4n + 32)}{(n+8)^2}$.

د- هل توجد قيمة للعدد n حتى يكون الأمل الرياضي معدومًا؟ $E(X) = \frac{4(-n^2 - 4n + 32)}{(n+8)^2} = 0$

تُكافئ: $0 = -n^2 - 4n + 32$ ، (لأن: $(n+8)^2 \neq 0; \forall n \geq 2$)

$$\begin{cases} 4 \neq 0 \\ (n+8)^2 \neq 0; \forall n \geq 2 \end{cases}$$

0.25	<p>، $\Delta = (-4)^2 - 4(-1) \times 32 = 144 = 12^2 > 0$ ، معناه أن: $-n^2 - 4n + 32 = 0$</p> $\begin{cases} n_1 = \frac{4-12}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \in \mathbb{N}. \text{ (مقبول)} \\ n_1 = \frac{4+12}{-2} = \frac{16}{-2} = -8 \notin \mathbb{N}. \text{ (مرفوض)} \end{cases}$ <p>يوجد حلان متمايزان هما:</p> <p>إذن: يكون الأمل الرياضي معدومًا من أجل $n = 4$.</p>
0.25	<p>(2) نفرض أننا سحبنا كرتين على التوالي دون إرجاع، ولتكن الحادثتين:</p> <p>A_n: "الحصول على كرتين من نفس اللون".</p> <p>B_n: "الحصول على كرتين من لونين مختلفين".</p> <p>أ- حساب $P(A_n)$ بدلالة n:</p> <p>آلية السحب: سحب كرتين ($p = 2$) من ($n = n + 8$) كرية عشوائيًا على التوالي دون إرجاع (نستخدم ترتيبًا).</p> <p>ومنه: $card\Omega = A_{n+8}^2 = \frac{(n+8)!}{(n+8-2)!} = \frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{(n+6)!} = (n+8)(n+7)$</p> <p>من جهة أخرى: الحصول على كرتين من نفس اللون بمعنى كرتين بيضاويين من 8، (أي: A_8^2) أو الحصول على كرتين سوداويين من n، (أي: A_n^2).</p> <p>ومنه: $P(A_n) = \frac{cardA_n}{card\Omega} = \frac{A_8^2 + A_n^2}{A_{n+8}^2} = \frac{\frac{8!}{(8-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!}}{(n+8)(n+7)} = \frac{\frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}}{(n+8)(n+7)} = \frac{56 + n^2 - n}{n^2 + 8n + 7n + 56}$</p> <p>إذن: $P(A_n) = \frac{n^2 - n + 56}{n^2 + 15n + 56}$</p> <p>ب- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$: لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 56}{n^2 + 15n + 56} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$</p> <p>إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 1$</p> <p>تفسير النتيجة: عندما يكون n كبير بالقدر الكافي، بمعنى يكون عدد الكريات السوداء كبير بالقدر الكافي، فيكون حادثة الحصول على كرتين سوداويين حادثة أكيدة وإحتماله مساويًا لـ 1.</p>
0.25	<p>ب- حساب $P(B_n)$ بدلالة n:</p> <p>الحصول على كرتين من لونين مختلفين بمعنى كرية بيضاء من 8، (أي: A_8^1) وكرية سوداء من n، (أي: A_n^1)، (كما أن الترتيب مهم قد تكون بيضاء وسوداء أو سوداء وبيضاء، حيث: $\frac{2!}{1! \times 1!}$).</p> <p>ومنه: $P(B_n) = \frac{cardB_n}{card\Omega} = \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{A_8^1 \times A_n^1}{A_{n+8}^2} = 2 \times \frac{\frac{8!}{(8-1)!} \times \frac{n!}{(n-1)!}}{(n+8)(n+7)} = 2 \times \frac{\frac{8 \times 7!}{7!} \times \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}}{(n+8)(n+7)}$</p> <p>إذن: $P(B_n) = \frac{16n}{n^2 + 15n + 56}$</p> <p>ب- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$: لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n}{n^2 + 15n + 56} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n}{n^2} = 0$</p> <p>إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 0$</p> <p>تفسير النتيجة: عندما يكون n كبير بالقدر الكافي، بمعنى يكون عدد الكريات السوداء كبير بالقدر الكافي، فيكون حادثة الحصول على كرتين من لونين مختلفين حادثة مستحيلة وإحتماله مساويًا لـ 0.</p>
0.25	<p>التمرين الثالث:</p> <p>1) حساب $(1 + \sqrt{3})^2$: لدينا: $(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$</p> <p>حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية:</p> $z^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} = 0 \dots \dots \dots (E)$ <p>نحسب المميز Δ حيث: $\Delta = b^2 - 4ac = \left[-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2}$، أي:</p>

0.25	$\Delta = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{4} - 2 = \frac{4 - 2\sqrt{3} - 8}{4} = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}$ $= i^2 \times \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2^2} = \left[\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) i \right]^2$
0.25	<p>بما أن: $\Delta \neq 0$، فإن: (E) تقبل حلين مترافقين:</p> <p>(بوضع: $i: \delta = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) i$ أو $\delta = -\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) i$، حيث: $\delta^2 = \Delta$).</p>
0.25	$z' = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) i}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right) - \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right) i$ <p>ومنه:</p> $z'' = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) i}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right) i$ <p>إذن: $S = \left\{ \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right) - \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right) i; \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{4} \right) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right) i \right\}$</p>
0.25	<p>(2) نعتبر النقط A، B، و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A, z_B, z_C حيث: $z_A = 1 + i$،</p> $z_C = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \text{ و } z_B = 1 - i\sqrt{3}$ <p>أ- إثبات أن: $z_C = \frac{z_A}{z_B}$ لدينا:</p>
0.25	$z_C = \frac{z_A}{z_B} \text{، إذن: } \frac{z_A}{z_B} = \frac{1 + i}{1 - i\sqrt{3}} \times \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{4} = z_C$
0.25	<p>ب- كتابة كل من z_B و z_A على الشكل المثلثي: لدينا: $z_A = 1 + i$، ومنه:</p> $r_A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
0.25	<p>أي: $z_A = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$،</p> $\arg(z_A) = \theta_A \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
0.25	<p>إذن: $z_A = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$</p> <p>من جهة أخرى، لدينا: $z_B = 1 - i\sqrt{3}$، ومنه:</p>
0.25	$r_B = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
0.25	<p>أي: $z_B = \left[2; -\frac{\pi}{3} \right]$</p> $\arg(z_B) = \theta_B \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_B = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta_B = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
0.25	<p>إذن: $z_B = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$</p>
0.25	<p>ج- إستنتاج الشكل الأسّي لـ z_C: بما أن: $z_A = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$ و $z_B = \left[2; -\frac{\pi}{3} \right]$ (حسب خواص exp)</p> $z_C = \frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}}}{2 e^{-\frac{\pi i}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) i}$ <p>إذن: $z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi i}{12}}$</p>
0.25	<p>د- إستنتاج أن: $\tan \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$: نعم أن: $\tan \frac{7\pi}{12} = \frac{\sin \frac{7\pi}{12}}{\cos \frac{7\pi}{12}}$، حيث: وحسب السؤالين ب و ج،</p> <p>فإن: $z_C = \frac{1 - \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi i}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ وبالمطابقة نجد أن:</p>

0.25	$\begin{cases} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ <p>ومنهُ: $\begin{cases} \frac{1-\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{7\pi}{12} \rightarrow \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{7\pi}{12} \rightarrow \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$</p> <p>علمًا أن: $\tan \frac{7\pi}{12} = \frac{\sin \frac{7\pi}{12}}{\cos \frac{7\pi}{12}} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{-2}$</p>
0.25	<p>إذن: $\tan \frac{7\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}$. وهو المطلوب.</p>
0.25	<p>(3) لتكن D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه ذو اللاحقة: $2i\sqrt{3}$. عبارة الانسحاب من الشكل: $z' = az + b$، وبما أن التحويل عبارة عن إنسحاب فإن: $a = 1$، وبما أن شعاعه ذو اللاحقة $2i\sqrt{3}$، فإن: $b = 2i\sqrt{3}$، إذن عبارة الانسحاب: $z' = z + 2i\sqrt{3}$. أ- إثبات أن: $z_D = \bar{z}_B$: لدينا: صورة النقطة B بالإنسحاب، مما يعني أن: $z_D = z_B + 2i\sqrt{3}$. ومنهُ: $z_D = 1 - i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3} = \bar{z}_B$. إذن: $z_D = \bar{z}_B$.</p>
0.25	<p>ب- إثبات أن: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (k \in \mathbb{Z})$: لدينا: $\frac{z_B}{z_D} = \frac{z_B}{\bar{z}_B}$، وحسب خواص العمدة، فإن: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{\bar{z}_B}\right) = \arg(z_B) - \arg(\bar{z}_B) = -\frac{\pi}{3} - \left[-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$ إذن: $\arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (k \in \mathbb{Z})$. - إستنتاج قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB})$: لدينا: $\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_D - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right)$ وحسب ما سبق فإن: $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (k \in \mathbb{Z})$.</p>
0.25	<p>ج- إثبات أن: $OD = OB$: لدينا: $OD = z_D - z_O = \bar{z}_B - z_O$، لأن: $z_D = \bar{z}_B$، (حسب - أ-)، وحسب خواص الطويلة، فإن: $OD = OB = 2$. إذن: $OD = OB$. - إستنتاج طبيعة المثلث OBD: بما أن: $OD = OB$، فإن: المثلث OBD متساوي الساقين.</p>
0.25	<p>د- إستنتاج صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$: بما أن: $OD = OB$ و $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; (k \in \mathbb{Z})$، فهذا يعني أن: صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة B.</p>
(4)	<p>التمرين الثالث: لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$، ومن أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$.</p> <p>1- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$: - نضع الخاصية: $P(n): u_n > 0; n \in \mathbb{N}$. - من أجل $n = 0$، فإن: $u_0 = \frac{3}{2} > 0$، ومنهُ: $P(0)$ محققة. - نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n، أي: $u_n > 0$. - نحاول إثبات صحة الخاصية من أجل $(n+1)$، أي: $u_{n+1} > 0$? - لدينا فرضاً: $u_n > 0$، و $\sqrt{1+u_n} > 0$، ومنهُ فإن: $\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} > 0$، أي: $u_{n+1} > 0$. إذن: وحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > 0$.</p>
0.25	<p>ب- إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة: أي نثبت أنّه: $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n < 0$? لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} - u_n = \frac{u_n - u_n\sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}} = u_n \left(\frac{1 - \sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}} \right)$. حيث: $u_{n+1} - u_n = u_n \left(\frac{1 - \sqrt{1+u_n}}{\sqrt{1+u_n}} \right) \times \frac{1 + \sqrt{1+u_n}}{1 + \sqrt{1+u_n}} = u_n \times \frac{1 - 1 - u_n}{1 + \sqrt{1+u_n}} = \frac{-u_n^2}{1 + \sqrt{1+u_n}}$</p>

0.25	<p>وَمَا أَنْ: $\forall n \in \mathbb{N}$; $\begin{cases} -u_n^2 < 0 \\ 1 + \sqrt{1+u_n} > 0 \end{cases}$, فَإِنَّ: $u_{n+1} - u_n < 0$, إذن: (u_n) متناقصة تمامًا على \mathbb{N}.</p>
0.25	<p>ج- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة: حسب أ- فإن: $u_n > 0; \forall n \in \mathbb{N}$, مما يعني أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالصفر. وحسب ب- فإن: (u_n) متناقصة تمامًا على \mathbb{N}, إذن: (u_n) متقاربة حسب مبرهنة ما. - حساب نهايتها: بما أن المتتالية (u_n) متقاربة، فهذا يعني أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, مع ℓ عدد منته ووحيد. أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$, ومنه وبالتعويض في عبارة u_{n+1} نجد أن: أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} = \ell$, $\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell}}$, وبترتيب الطرفين: $\ell^2 = \frac{\ell^2}{1+\ell}$, ومنه: إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.</p>
0.25	<p>2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بحدّها الأول: $v_0 = 1$, وبالعلاقة التراجعية: $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n}$. أ- إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n, $v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$: نلاحظ أن: $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_n} = v_n \times \frac{1}{u_n}$, حيث: 0.25 $u_{0+1} = \frac{u_0}{\sqrt{1+u_0}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1+\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ <small>نقلب الطرفين</small> $\frac{1}{u_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 0.25 - من جهة أخرى: $u_1 \geq u_n > 0$, (لأن: (u_n) متناقصة حسب السؤال الثاني أ-), ومنه: $\frac{1}{u_1} \leq \frac{1}{u_n}$ 0.25 أي: $\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{u_1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, وبضرب الطرفين في $v_n > 0$, نجد أن: $\frac{v_n}{u_n} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$. إذن: $v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n$.</p>
0.25	<p>ب- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n, $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$: - نضع الخاصية: $P(n): v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}; n \in \mathbb{N}^*$ - من أجل $n = 1$, فإن: $v_1 = \frac{v_0}{u_0} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^0$, أي: $v_1 \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^0$, ومنه: $P(1)$ محققة. - نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n, أي: $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$. - نحاول إثبات صحة الخاصية من أجل $(n+1)$, أي: $v_{n+1} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^n$؟ - لدينا فرضاً: $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$, وبضرب الطرفين في $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) > 0$, نجد أن: $v_n \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^n$ 0.25 $v_{n+1} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^n$, وبالتعدي نجد أن: $v_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^n$ - إذن: وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$.</p>
	<p>ج- حساب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$: حسب ب- فإن: $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$, ومنه:</p>

0.25	<p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (حسب قاعدة المقارنة)، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1} = +\infty$</p>
	<p>(3) نضع: $S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \right)$; حيث: $n \geq 1$.</p> <p>أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n > 1$:</p> <p>$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{45}{2} \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \right]$</p> <p>لدينا حسب السؤال الثاني ب-: $v_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$، ومنه: $\frac{1}{v_n} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{n-1}$، وبتربيع الطرفين نحصل على: $\left(\frac{1}{v_n}\right)^2 \leq \left[\frac{3}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{n-1}\right]^2 = \frac{9}{4} \left[\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2\right]^{n-1} = \frac{9}{4} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{9}{4} \left(\frac{9}{10}\right)^n \times \frac{10}{9}$</p> <p>أي: $\left(\frac{1}{v_n}\right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^n$، حيث:</p> <ul style="list-style-type: none"> - من أجل $n = 1$، فإن: $\left(\frac{1}{v_1}\right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^1$ - من أجل $n = 2$، فإن: $\left(\frac{1}{v_2}\right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^2$ -- من أجل $n = 3$، فإن: $\left(\frac{1}{v_3}\right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^3$ - من أجل $n - 1$، فإن: $\left(\frac{1}{v_{n-1}}\right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ - من أجل n، فإن: $\left(\frac{1}{v_n}\right)^2 \leq \frac{5}{2} \left(\frac{9}{10}\right)^n$ <p>وَبجمع الأطراف، طرفاً لطرف، نحصل على:</p>
0.25	<p>$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{5}{2} \left[\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + \left(\frac{9}{10}\right)^n \right]$</p>
0.25	<p>نضع: $t_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n$، و $S'_n = \left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10}\right)^n = t_1 + t_2 + \dots + t_n$</p> <p>فيكون: $t_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n$، مما يعني أن: (t_n) متتالية هندسية أساسها: $q = \frac{9}{10}$ وحدها الأول: $t_1 = \frac{9}{10}$، وبتطبيق قاعدة المجموع لحدود متتابعة من متتالية هندسية:</p>
0.25	<p>$S'_n = t_1 \times \frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} = \frac{9}{10} \times \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^n}{1-\frac{9}{10}} = \frac{9}{10} \times 10 \times \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \right] = 9 \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \right]$</p> <p>وبالتعويض نحصل على: $\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{5}{2} \times 9 \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \right]$</p> <p>إذن: $\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \leq \frac{45}{2} \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \right]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم.</p>
0.25	<p>ب- استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$: لدينا: $S_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} + \frac{1}{v_3^2} + \dots + \frac{1}{v_n^2} \right)$، من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>وحسب أ- وحسب مبرهنة الحصر، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{45}{2n} \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \right] = 0$</p> <p>لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{45}{2n} = 0$، إذن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$، $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{45}{2n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0 ; q = \frac{9}{10} \in]-1 ; 1[\end{array} \right.$</p>
(ن7)	<p>التمرين الرابع: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4)$</p>

(1) أحساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

0.25 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$: أي، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{5}{2} \right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty$: لأن
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

0.25 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$: أي، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{5}{2} \right) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$: لأن
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

ب- إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مانلاً (Δ) عند $(-\infty)$ ، يُطلب تعيين معادلة له:

0.25 نلاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + x - \frac{5}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2) = -\infty$: لأن
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

0.25 إذن: المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مانلاً $(\Delta): y = -x + \frac{5}{2}$ عند $(-\infty)$.

ج- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) : أي ندرس إشارة $f(x) - y$ ، حيث:

0.25 $f(x) - y = -\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) = 0 \rightarrow e^{x-2} = 4 \rightarrow x - 2 = \ln 4$
أي: $x = 2 + \ln 4$ ، لأن: $e^{x-2} \neq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ ، أما إشارتها، فهي موضحة في الجدول أدناه:

x	$-\infty$	$2 + \ln 4$	$+\infty$
$-\frac{1}{2} e^{x-2}$		-	-
$e^{x-2} - 4$		- 0 +	
$f(x) - y$		+ 0 -	

0.25 وعليه فإن: - (C_f) يقع أعلى (Δ) لما $x \in]-\infty; 2 + \ln 4[$.
- $(C_f) \cap (\Delta) = \left\{ 2 + \ln 4; \frac{1}{2} + \ln 2 \right\}$.
- (C_f) يقع أسفل (Δ) لما $x \in]2 + \ln 4; +\infty[$.

(2) أ- حساب $f'(x)$ ، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f : f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} كمجموع وجداء دوال قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ،

0.25 حيث: $f'(x) = -1 - \frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) - e^{x-2} \times \frac{1}{2} \times e^{x-2}$ ، أي:
 $f'(x) = -1 - \frac{1}{2} e^{x-2} \times e^{x-2} + 2e^{x-2} - \frac{1}{2} e^{x-2} \times e^{x-2}$ ، ومنه:
إذن: $f'(x) = -1 + 2e^{x-2} - (e^{x-2})^2$.

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

0.25 حسب عبارة $f'(x)$ ، فإن: $f'(x) \leq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ ، لأن:
 $\begin{cases} -1 < 0 \\ (e^{x-2} - 1)^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \\ e^{x-2} - 1 = 0 \rightarrow e^{x-2} = 1 \rightarrow x - 2 = \ln 1 \rightarrow x = 2 \end{cases}$
إذن: f متناقصة تماماً على \mathbb{R} .

- تشكيل جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'		0	
f	$+\infty$	$f(2)$	$-\infty$

0.25

حيث: $f(2) = -2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2-2}(e^{2-2} - 4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

0.25

ج اثبات أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها: حسب السؤال الثاني - أ. فإن:

$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$ ، و f' قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} كتركيب دوال قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} ،
حيث: $f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)^{2-1} = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$ ،
ومنه: $f''(x) = 0$ ، أي: $e^{x-2} - 1 = 0$ ، فيكون: $x - 2 = \ln 1 \rightarrow x = 2$ ،
(لأن: $-2e^{x-2} < 0; \forall x \in \mathbb{R}$). وتكون إشارة $f''(x)$ كما هي موضحة في الجدول أدناه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$		$-$	$-$
$e^{x-2} - 1$		0	$+$
$f''(x)$		$+$	$-$

0.25

مما يعني أن: $f''(x)$ إنعدمت من أجل $x_0 = 2$ وغيّرت إشارتها،

0.25

إذن: (C_f) يقبل نقطة إنعطاف هي $A(2; 2)$.

0.25

(3) اثبات أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$:

0.25

f معرفة ومستمرة ومتناقصة على $[2 + \ln 3; 2 + \ln 4]$ ، حيث:

0.25

$$f(2 + \ln 3) = -2 - \ln 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 3-2}(e^{2+\ln 3-2} - 4) = 2 - \ln 3 = 0.901$$

0.25

$$f(2 + \ln 4) = -2 - \ln 4 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 4-2}(e^{2+\ln 4-2} - 4) = \frac{1}{2} - \ln 4 = -0.886$$

0.25

أي: $0 < f(2 + \ln 3) \times f(2 + \ln 4) < 0$ ، ومنه وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة فإنه يوجد حل وحيد α حيث: $\alpha \in]2 + \ln 3; 2 + \ln 4[$ يحقق: $f(\alpha) = 0$.

0.25

(4) اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) يُوازي المقارب المائل (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له:

0.25

أي نُثبت أن: $f'(x_0) = -1$ ، حيث: $f'(x_0) = -(e^{x_0-2} - 1)^2 = -1$ ، ومنه:
 $(e^{x_0-2} - 1)^2 = 1$ ، أي: $|e^{x_0-2} - 1| = 1$ ، ومنه:

$$\begin{cases} e^{x_0-2} - 1 = -1 \rightarrow e^{x_0-2} = 0, (\text{مستحيل}), e^{x_0-2} > 0; \forall x_0 \in \mathbb{R} \\ e^{x_0-2} - 1 = 1 \rightarrow e^{x_0-2} = 2 \rightarrow x_0 - 2 = \ln 2 \rightarrow x_0 = 2 + \ln 2 \end{cases}$$

0.25

إذن: المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) يُوازي المقارب المائل (Δ) عند $x_0 = 2 + \ln 2$.

حيث: $(T): y = f'(2 + \ln 2)(x - 2 - \ln 2) + f(2 + \ln 2)$

$$\begin{cases} f'(2 + \ln 2) = -1 \\ f(2 + \ln 2) = -2 - \ln 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2+\ln 2-2}(e^{2+\ln 2-2} - 4) = \frac{5}{2} - \ln 2 \end{cases}$$

0.25

ومنه: $(T): y = -(x - 2 - \ln 2) + \frac{5}{2} - \ln 2 = -x + 2 + \ln 2 + \frac{5}{2} - \ln 2$

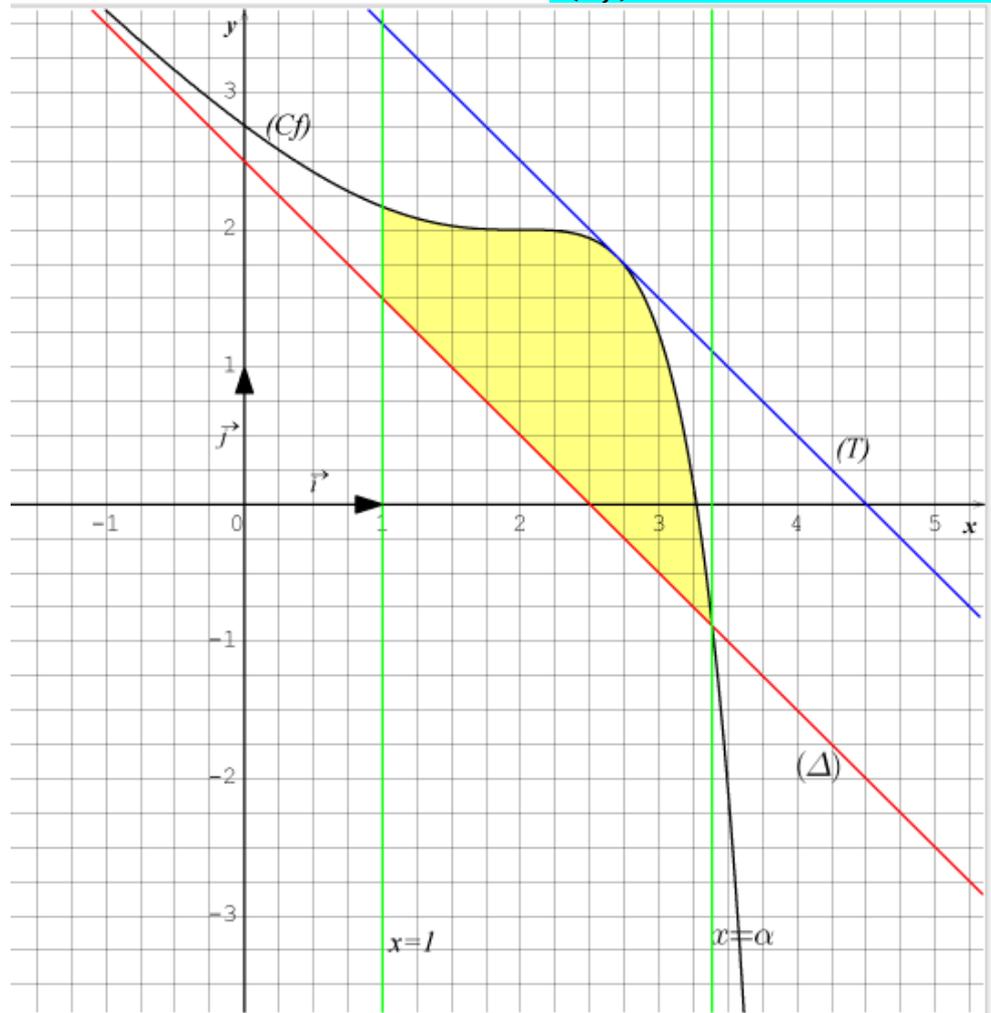
إذن: $(T): y = -x + \frac{9}{2}$.

(5) رسم كلاً من (Δ) ، (T) ، و (C_f) :

0.25

0.25

0.25



0.25

(6) المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$: هي فواصل نقطة تقاطع البيان (C_f) مع المستقيمت المائلة: $(\Delta_m): y = -x + m$ ، حيث:

0.25

لما $m \in]-\infty; \frac{5}{2}]$ يوجد حل وحيد موجب.

لما $m \in]\frac{5}{2}; \frac{11}{4}]$ حلان مختلفان في الإشارة.

لما $m = \frac{11}{4}$ حل معدوم وآخر موجب.

لما $m \in]\frac{11}{4}; \frac{9}{2}]$ حلان موجبان مختلفان.

لما $m = \frac{9}{2}$ حل وحيد موجب هو $x = 2$.

لما $m \in]\frac{9}{2}; +\infty[$ لا توجد حلول.

0.25

(7) لتكن $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيمت: $y = -x + \frac{5}{2}$ ،

$x = \alpha$ و $x = 1$ حساب $\mathcal{A}(\alpha)$ بدلالة α : بما أن المنحنى (C_f) يقع فوق (Δ) على $]1; \alpha[$ ،

فإن:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \int_1^\alpha [f(x) - y] dx = 4 \int_1^\alpha \left[-\frac{1}{2} e^{x-2} (e^{x-2} - 4) \right] dx$$

0.25

$$\mathcal{A}(\alpha) = 4 \int_1^\alpha \left[-\frac{1}{2} e^{2x-4} + 2e^{x-2} \right] dx = 4 \left[-\frac{1}{4} e^{2x-4} + 2e^{x-2} \right]_1^\alpha$$

0.25

$$\mathcal{A}(\alpha) = 4(-e^{2\alpha-4} + 2e^{\alpha-2} + e^{-2} - 2e^{-1}). \text{cm}^2$$